



Concursul MateInfoUB 2024 - 18 mai 2024 -

Problema 1. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$; spunem că A e *mărginită* dacă există un număr real pozitiv C astfel încât $\max\{|a_n|, |b_n|, |c_n|, |d_n|\} < C$ pentru orice număr natural nenul n , unde

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}.$$

- Dacă A e mărginită arătați că A^2 e mărginită.
- Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ cu $\det(A) = 0$; arătați că există $\lambda \in \mathbb{Z}$ astfel încât $A^2 = \lambda A$. Arătați că dacă, în plus, A e mărginită atunci $A^{n+2} = A^n$ pentru orice $n \geq 2$.
- Fie $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ cu $\det(B) \neq 0$. Arătați că B este mărginită dacă și numai dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $B^n = I_2$ (unde I_2 este matricea identitate).
- Demonstrați că, dacă $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ este o matrice mărginită, atunci mulțimea $\{D^n | n \in \mathbb{N}^*\}$ are cel mult 6 elemente.

Rezolvări subiectul 1.

- Șirurile $\{|a_{2n}|, |b_{2n}|, |c_{2n}|, |d_{2n}|\}$ sunt subșiruri respectiv ale șirurilor $\{|a_n|, |b_n|, |c_n|, |d_n|\}$ deci rămân mărginite.
- Deoarece A este singulară, din formula Cayley-Hamilton deducem $A^2 = \lambda \cdot A$ cu $\lambda = \text{Tr}(A)$. Cum $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ deducem $\text{Tr}(A) \in \mathbb{Z}$. Dacă A este mărginită, atunci $|\lambda| \leq 1$, de unde avem că fie $A^2 = 0_2$ (unde 0_2 este matricea nulă), fie $A^2 = \pm A$ de unde deducem $A^3 = A$; în ambele situații avem deci $A^{n+2} = A^n$ pentru $n \geq 2$.
- Considerăm mulțimea $\mathcal{M} := \{M = (m_{ij})_{i,j=1,2} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{Z}) | m_{ij} \in [-C, C]\}$. Evident, $\mathcal{M}$ este o mulțime finită. Din enunț rezultă că $B^n \in \mathcal{M}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ iar cum $\mathcal{M}$ este finită deducem că vor exista două valori distincte $n_1 > n_2$ naturale astfel încât $B^{n_1} = B^{n_2}$; cum $\det(B) \neq 0$ deducem $B^{n_1 - n_2} = I$. Reciproc, dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $B^n = I_2$ atunci șirul puterilor $\{B^n | n \in \mathbb{N}^*\}$ va fi periodic, deci matricea B este mărginită.
- Soluția 1.* Dacă D este singulară, concluzia rezultă imediat din punctul b). Dacă D are determinant nenul, utilizând punctul c) deducem $\det(D) = \pm 1$. Considerăm polinoamele $P(X) = X^2 - tX + \det(D)$ (unde $t := \text{Tr}(D)$) și $F(X) = X^n - 1$ (unde n este numărul pentru care $B^n = I_2$) din Cayley-Hamilton și enunț avem că $F(D) = P(D) = 0_2$.

Dacă P nu divide F în inelul de polinoame $\mathbb{R}[X]$, atunci restul $r(X)$ este polinom de gradul 1, $r(X) = aX + b$, și avem $r(D) = O_2$. Deci $aD + bI_2 = O_2$ de unde găsim imediat că $D = \pm I_2$.

Dacă P divide pe F , deducem că orice rădăcină (complexă) a lui P este o rădăcină a lui F , deci este rădăcină de ordin n a unității. Dacă α, β sunt rădăcini de ordin n a unității cu $\alpha + \beta = t \in \mathbb{Z}$ și $\alpha\beta = \det(D) = \pm 1$ vedem că dacă $\det(D) = -1$ atunci neapărat $t = 0$, iar în cazul $\det(D) = 1$ atunci $t \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Cazurile $t = \pm 2$ se elimină ușor pentru că în aceste situații polinomul F ar avea o rădăcină dublă.

Vedem deci că A verifică una dintre ecuațiile: $D^2 = \pm I_2$ sau $D^2 \pm D + I_2 = O_2$. În toate aceste cazuri rezultă $D^6 = I_2$, de unde concluzia.

d) *Soluția 2 - Ideea de demonstrație.* Pentru cel puțin un subșir $\{x_n\}$ dintre șirurile $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{d_n\}$ există o mulțime infinită $M \subset \mathbb{N}$ astfel încât $x_n \neq 0$ pentru orice $n \in M$, altfel $D^n = 0_2$ pentru n suficient de mare. Fie $t := Tr(D)$; din $D^2 + I_2 = tD$ deducem $(D^2 + I_2)^n = t^n D^n$ de unde $\sum_{k=0}^n C_n^k D^{2k} = t^n D^n$; aceasta implică $\sum_{k=0}^n C_n^k x_{2k} = t^n x_n$. Trecând la module în această egalitate și ținând

cont că $|x_{2k}| \leq C$ pentru orice k și $|x_n| \geq 1$ pentru orice $n \in M$, deducem $C \left(\sum_{k=0}^n C_n^k \right) \geq t^n$ pentru orice $n \in M$, deci $C \cdot 2^n \geq |t|^n$ pentru orice $n \in M$. Cum M este infinită deducem $|t| \leq 2$.

Ca atare, D verifică o ecuație de forma $D^2 \pm I_2 = 0_2$ sau $D^2 \pm D \pm I_2 = 0_2$ sau $D^2 \pm 2D \pm I_2 = O_2$. Primul caz ne conduce direct la concluzie. Excludem cazurile $D^2 = 2D + I_2$ respectiv $D^2 = D + I_2$ după cum urmează. Fie $T_n := Tr(D^n)$; atunci șirul $\{T_n\}$ satisface recurența $T_{n+2} = 2T_{n+1} + T_n$ (resp. $T_{n+2} = T_{n+1} + T_n$) cu condițiile inițiale $T_0 = T_1 = 2$ (respectiv $T_0 = 2, T_1 = 1$). În ambele situații rezultă că șirul $\{T_n\}$ e nemărginit, contradicție cu faptul că $|T_n| \leq 2C$ pentru orice n .

În cazul $D^2 = 2D - I_2$, punând $B := D - I_2$ rezultă imediat $B^2 = O_2$ și deci $D^n = I_2 + nB$ pentru orice n ; cum D e mărginită rezultă $B = O_2$ deci $D = I_2$. Celelalte cazuri duc direct la concluzie, eventual schimbând D cu $-D$.

Problema 2. Considerăm mulțimile

$\mathcal{M} = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ este de două ori derivabilă, } f'' \text{ continuă și } f'(0) = f'(1) = f(0) = 0, f(1) = 1\},$

$$\mathcal{N} = \{g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid g \text{ continuă, } \int_0^1 g(x)dx = 0, \int_0^1 xg(x)dx = 1\}.$$

a) Fie $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ și $g_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, g_0(x) = ax + b$. Determinați a și b astfel încât $g_0 \in \mathcal{N}$.

b) Demonstrați că pentru orice $g \in \mathcal{N}$, funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x (t - x)g(t)dt$, aparține lui $\mathcal{M}$.

c) Fie $f \in \mathcal{M}$ și $k > 0$ astfel încât $|f''(x)| \leq k$ pentru orice $x \in [0, 1]$. Arătați că pentru orice $x \in [0, 1]$ avem $|f'(x)| \leq k \min\{x, 1 - x\}$ și apoi, utilizând eventual această inegalitate, demonstrați că $|f(x)| \leq \frac{k}{4}$.

d) Demonstrați că pentru orice $f \in \mathcal{M}$ și $g \in \mathcal{N}$ există $x_0, y_0 \in [0, 1]$ astfel încât $|f''(x_0)| \geq 4$ și $|g(y_0)| \geq 4$.

Rezolvări subiectul 2.

a) Deoarece $g_0 \in \mathcal{N}$ obținem atunci $\int_0^1 (ax + b)dx = 0$ și $\int_0^1 (ax^2 + bx)dx = 1$, de unde rezultă $\frac{a}{2} + b = 0$ și $\frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 1$. Rezolvând sistemul de 2 ecuații cu 2 necunoscute obținem $a = 12, b = -6$ și implicit funcția $g_0(x) = 12x - 6$.

b) Cum $f(x) = \int_0^x tg(t)dt - x \int_0^x g(t)dt$ rezultă că f este derivabilă și

$$f'(x) = xg(x) - \int_0^x g(t)dt - xg(x) = - \int_0^x g(t)dt.$$

Din faptul că $f'(x) = - \int_0^x g(t)dt$ obținem că f' este derivabilă și $f''(x) = -g(x), (\forall) x \in [0, 1]$. Deci f este de două ori derivabilă, f'' este continuă (pentru că g este continuă) și

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(1) = - \int_0^1 g(t)dt = 0,$$

$$f(1) = \int_0^1 tg(t)dt - \int_0^1 g(t)dt = 1 - 0 = 1 \text{ (deoarece } g \in \mathcal{N}).$$

c) *Soluția 1.* Observăm că $f'(x) = \int_0^x f''(t)dt = \int_1^x f''(t)dt (\forall) x \in [0, 1]$, deci

$$|f'(x)| = \left| \int_0^x f''(t)dt \right| \leq \int_0^x |f''(t)|dt \leq k \cdot x,$$

$$|f'(x)| = \left| \int_1^x f''(t)dt \right| \leq \int_1^x |f''(t)|dt \leq k \cdot (1 - x),$$

de unde obținem $|f'(x)| \leq k \min\{x, 1 - x\}$.

Pentru a demonstra a doua inegalitate, folosind $f(x) = \int_0^x f'(t)dt$ rezultă că

$$|f(x)| \leq \left| \int_0^x f'(t)dt \right| \leq \int_0^x |f'(t)|dt \leq \int_0^1 |f'(t)|dt.$$

Folosind inegalitatea demonstrată în prima parte a lui c) și înlocuind în ultima integrală obținem

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f'(t)|dt &\leq \int_0^1 k \min\{t, 1-t\}dt = k \left(\int_0^{\frac{1}{2}} tdt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)dt \right) = \\ &k \left(\frac{t^2}{2} \Big|_0^{\frac{1}{2}} + t \Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \frac{t^2}{2} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \right) = k \left(\frac{1}{8} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \right) = \frac{k}{4}. \end{aligned}$$

Soluția 2. Fie $f \in \mathcal{M}$. Pentru orice $x > 0$, $x \in [0, 1]$, aplicăm teorema lui Lagrange funcției f' pe $[0, x]$. Rezultă că există $x' \in (0, x)$ astfel ca

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = f''(x').$$

Deci $|f'(x)| = |f''(x')| \cdot x \leq kx$. Pentru orice $x < 1$, aplicăm teorema lui Lagrange funcției f' pe $[x, 1]$. Rezultă că există $x'' \in (x, 1)$ astfel încât

$$\frac{f'(1) - f'(x)}{1 - x} = f''(x'').$$

Deci $|f'(x)| = |f''(x'')| \cdot (1 - x) \leq k(1 - x)$. Deducem că $|f'(x)| \leq k \min\{x, 1 - x\}$ pentru orice $x \in [0, 1]$. Cum $f'(0) = f'(1) = 0$, avem $|f'(x)| \leq k \min\{x, 1 - x\}$, pentru orice $x \in [0, 1]$.

d) *Soluția 1.* Fie $f \in \mathcal{M}$. Cum $|f''|$ continuă pe $[0, 1]$, atunci $|f''|$ este mărginită și își atinge marginile. Fie $x_0 \in [0, 1]$ astfel încât $|f''(x_0)| = \max |f''(x)| = k_0$. Atunci rezultă că $|f''(x)| \leq k_0$, $(\forall) x \in [0, 1]$. Folosind c) avem că $|f(x)| \leq \frac{k_0}{4}$, $(\forall) x \in [0, 1]$, deci în particular $|f(1)| \leq \frac{k_0}{4}$ și cum $f(1) = 1$ rezultă că $k_0 \geq 4$ și implicit $|f''(x_0)| \geq 4$.

Fie $g \in \mathcal{N}$. Folosind b) deducem că $f \in \mathcal{M}$, unde $f(x) = \int_0^x (t - x)g(t)dt$. În plus avem că $f''(x) = -g(x)$, deci există $y_0 \in [0, 1]$ astfel încât $|f''(y_0)| = |g(y_0)| \geq 4$.

Soluția 2. Fie $g \in \mathcal{N}$. Presupunem că $|g(x)| < 4$, pentru orice $x \in [0, 1]$. Cum g este continuă pe $[0, 1]$, din teorema lui Weierstrass există $M > 0$, $M = \max_{x \in [0, 1]} |g(x)|$ și $M < 4$.

Avem

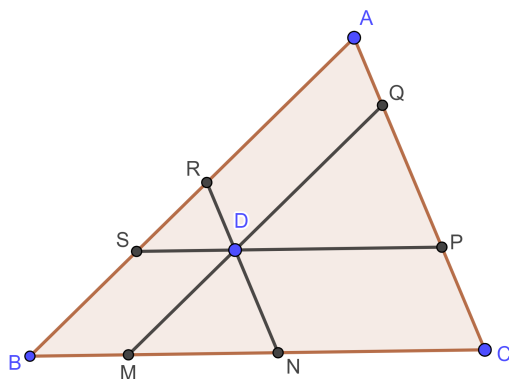
$$\int_0^1 g(x)g_0(x)dx = \int_0^1 (12x - 6)g(x)dx = 12 \int_0^1 xg(x)dx - 6 \int_0^1 g(x)dx = 12 \cdot 1 - 0 = 12.$$

Deci

$$\begin{aligned} 12 &= \int_0^1 (12x - 6)g(x)dx \leq \int_0^1 |12x - 6| \cdot |g(x)|dx \leq M \int_0^1 |12x - 6|dx \\ &= M \left(\int_0^{1/2} (6 - 12x)dx + \int_{1/2}^1 (12x - 6)dx \right) = 3M < 12, \end{aligned}$$

ceea ce reprezintă o contradicție. Așadar există $y_0 \in [0, 1]$ cu $|g(y_0)| \geq 4$.

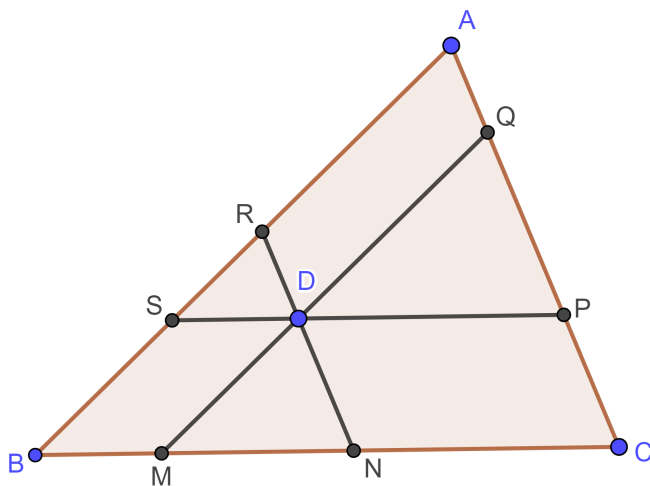
Problema 3. În interiorul triunghiului ABC se alege la întâmplare punctul D . Paralelele duse prin D la BC , CA , respectiv AB intersectează laturile triunghiului în punctele P și S , N și R , respectiv M și Q (unde $M, N \in BC$; $P, Q \in AC$; $R, S \in AB$).



Demonstrați că:

- suma perimetrelor triunghiurilor DMN , DPQ și DRS este egală cu perimetrul triunghiului ABC ;
- dacă D este centrul de greutate al triunghiului ABC atunci el este centru de greutate și al triunghiului MPR ;
- dacă triunghiurile MPR și SNQ au același centru de greutate, atunci acesta coincide cu D ;
- suma ariilor triunghiurilor DMN , DPQ și DRS este cel puțin o treime din aria triunghiului ABC , iar aria triunghiului MPR este cel mult egală cu o treime din aria triunghiului ABC .

Rezolvări subiectul 3.



- Deoarece $BMDS$, $CNDP$ și $AQDR$ sunt paralelograme, avem: $DS = BM$; $DP = NC$; $DM = SB$; $DQ = RA$; $DN = PC$; $DR = AQ$.

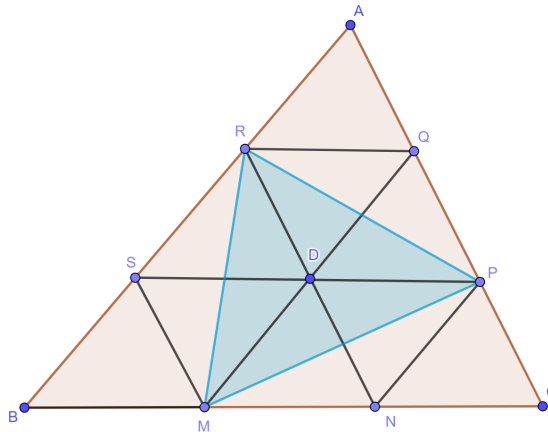
Se obține imediat, de aici, că

$$P_{DMN} + P_{DPQ} + P_{DRS} = P_{ABC},$$

unde P_{DMN} este o notație pentru perimetrul triunghiului DMN (și analogele).

b) *Soluția 1.* Avem $\overrightarrow{DP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ și $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Deoarece $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ deducem $\overrightarrow{DP} + \overrightarrow{DR} + \overrightarrow{DM} = \vec{0}$ de unde rezultă că D este centrul de greutate al triunghiului MPR .

Soluția 2. Dacă D este centrul de greutate al triunghiului ABC , atunci construcția din enunț partajează triunghiul ABC în nouă triunghiuri care (se vede ușor că) sunt congruente (ca în figura de mai jos).



În figura de mai sus, observăm că patrulaterul $DPQR$ este un paralelogram. De aceea, dreapta MD trece prin mijlocul segmentului PR , deci D se află pe mediana din M a triunghiului MPR . Analog, deducem că punctul D se află și pe mediana din P a triunghiului MPR , adică D este centrul de greutate al acestui triunghi.

c) Fie G_1 și G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor MPR , respectiv NQS . Atunci:

$$3\overrightarrow{DG_1} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{DR}; \quad 3\overrightarrow{DG_2} = \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{DS}.$$

Deducem că

$$(1) \quad G_1 = G_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{DG_1} = \overrightarrow{DG_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{DR} = \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{DS}$$

adică

$$G_1 = G_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{DS} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{DR}.$$

Deoarece $PS \parallel BC$ și $NR \parallel AC$, vectorii $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{DS}$, respectiv $\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{DR}$ au direcțiile date de dreptele concurente BC , respectiv AC . De aceea, acești vectori pot fi egali doar dacă sunt vectori nuli. Deducem de aici că

$$G_1 = G_2 \Rightarrow MN = SD \text{ și } PQ = RD.$$

Un raționament analog (în care grupăm altfel termenii din (1) conduce la concluzia că

$$G_1 = G_2 \Rightarrow MN = DP, PQ = DN, RS = DQ, RS = DM.$$

Am arătat deci că, dacă $G_1 = G_2$, punctul D este mijlocul fiecăruia din segmentele MQ , NR , PS . Putem folosi aceleași argumente ca în demonstrația punctului b) pentru a deduce că D este centrul de greutate (comun) al triunghiurilor MPR și SNQ .

d) Observăm mai întâi că triunghiurile DMN , QDP și RSD sunt asemenea cu triunghiul ABC (și, desigur, asemenea între ele); notăm x, y , respectiv z rapoartele de asemănare dintre aceste trei triunghiuri și triunghiul ABC (deci: $MN/BC = x$, $PQ/AC = y$, $RS/AB = z$).

Deoarece $MN + DP + SD = MN + NC + BM = BC$, deducem că

$$1 = \frac{MN}{BC} + \frac{DP}{BC} + \frac{SD}{BC} = x + y + z.$$

Din asemănarea triunghiurilor DMN, QDP și RSD cu triunghiul ABC , având rapoartele de asemănare x, y , respectiv z , deducem că

$$A_{DMN} = x^2 A_{ABC}; A_{QDP} = y^2 A_{ABC}; A_{RSD} = z^2 A_{ABC},$$

unde A_{DMN} este o notație pentru aria triunghiului DMN (și analogele).

Folosind, de exemplu, inegalitatea

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2,$$

(valabilă pentru orice trei numere reale a, b, c), precum și faptul că $x + y + z = 1$, deducem că

$$A_{DMN} + A_{QDP} + A_{RSD} = (x^2 + y^2 + z^2) A_{ABC} \geq \frac{(x + y + z)^2}{3} A_{ABC} = \frac{1}{3} A_{ABC}.$$

Pentru a doua parte a punctului d), indicăm în continuare mai multe posibile soluții.

Soluția 1.

Observăm că

$$A_{MPR} = A_{DMP} + A_{DPR} + A_{DRM}.$$

Pe de altă parte:

$$A_{DMP} = A_{DCP} = \frac{1}{2} A_{DNCP},$$

(analog pentru A_{DPR} și A_{DRM}), deci

$$A_{MPR} = A_{DMP} + A_{DPR} + A_{DRM} = \frac{1}{2} (A_{BMDS} + A_{CNDP} + A_{AQDR}) = \frac{1}{2} (A_{ABC} - (A_{DMN} + A_{DPQ} + A_{DQR})).$$

Folosind rezultatul anterior, deducem că

$$A_{MPR} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{2A_{ABC}}{3} = \frac{1}{3} A_{ABC}.$$

Soluția 2 - Ideea de demonstrație.

Exprimăm aria triunghiului MPR ca diferența între aria triunghiului ABC și suma ariilor triunghiurilor BMR, CPM și ARP . Ne folosim de egalitatea:

$$\frac{A_{BMR}}{A_{BAC}} = \frac{BM}{BC} \cdot \frac{BR}{BA} = z(x + z).$$

Procedând analog pentru celelalte două triunghiuri, obținem:

$$A_{MPR} = (1 - z(x + z) - y(z + y) - x(y + x)) \cdot A_{ABC} = (xy + xz + yz) \cdot A_{ABC}$$

(am ținut cont de relația $x + y + z = 1$). Deoarece $3(xy + xz + yz) \leq (x + y + z)^2 = 1$, obținem relația din enunț.

Soluția 3 - Ideea de demonstrație.

Observăm că $\overrightarrow{DM} = (x + y)\overrightarrow{DB} + z\overrightarrow{DC}$, deoarece $\frac{BM}{BC} = \frac{SD}{BC} = z$, iar $x + y + z = 1$. Analog:

$$\overrightarrow{DP} = (y + z)\overrightarrow{DC} + x\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DR} = (x + z)\overrightarrow{DA} + y\overrightarrow{DB}.$$

Considerăm un sistem de axe ortogonale, cu originea în D și exprimăm aria triunghiului MPR cu ajutorul unui determinant; folosind egalitatea $x + y + z = 1$, pentru a înlocui numerele de pe una din liniile determinatului, obținem că:

$$A_{MPR} = (xy + yz + zx) \cdot A_{ABC},$$

de unde se obține inegalitatea cerută.